## Exercice 17 :

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x$$

1°/ Etudier les variations de $f$.

2°/ Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

a) Calculer $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} f(x)\,dx$

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} I(\lambda)$.

3°/ Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

a) Démontrer que, pour tout $k$ entier naturel tel que : $1\leq k\leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

b) En déduire que $S_n-\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})\leq I(\frac{1}{n})<S_n$ puis que :

$$I(\frac{1}{n})\leq S_n\leq I(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

## Exercice 18 :

Soit $x\in[0,1]$ et $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}$ où $n\geq 1$

1°/ a) Montrer que $\forall t\in[0,1]$, on a : $\sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k+\frac{(-t)^{n-1}}{1+t}=\frac{1}{1+t}$

b) En déduire que $\forall x\in[0,1]$, $\ln(1+x)=P_n(x)+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{n-1}}{1+t}dt$

2°/ Soit $a_n=\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}dt$ $(n\geq 1)$.